

Лекция 5

Аукцион спроса и предложения.
Территориально распределенный
аукцион.

Постановка задачи

c_D - ценовые заявки потребителей
 $D \in \Pi$ (готовность купить 1 ед. товара
по цене не выше c_D)

$c_G, g \in \Gamma$ - ценовые заявки генераторов
(готовы продать 1 ед. товара по цене не ниже
 c_G)

Найти равновесные цены и объемы

x_D и x_G , которые явл.ся Н.Р. стратегиями
участников

Математическая модель

Функция благообстройства рынка

$$\sum_{n \in \Pi} c_n x_n - \sum_{r \in \Gamma} c_r x_r \rightarrow \max_{x_n, x_r}$$

$$[\lambda] \quad \sum x_n - \sum x_r = 0$$

$$x_n \in [0, \bar{x}_n]$$

$$x_r \in [0, \bar{x}_r]$$

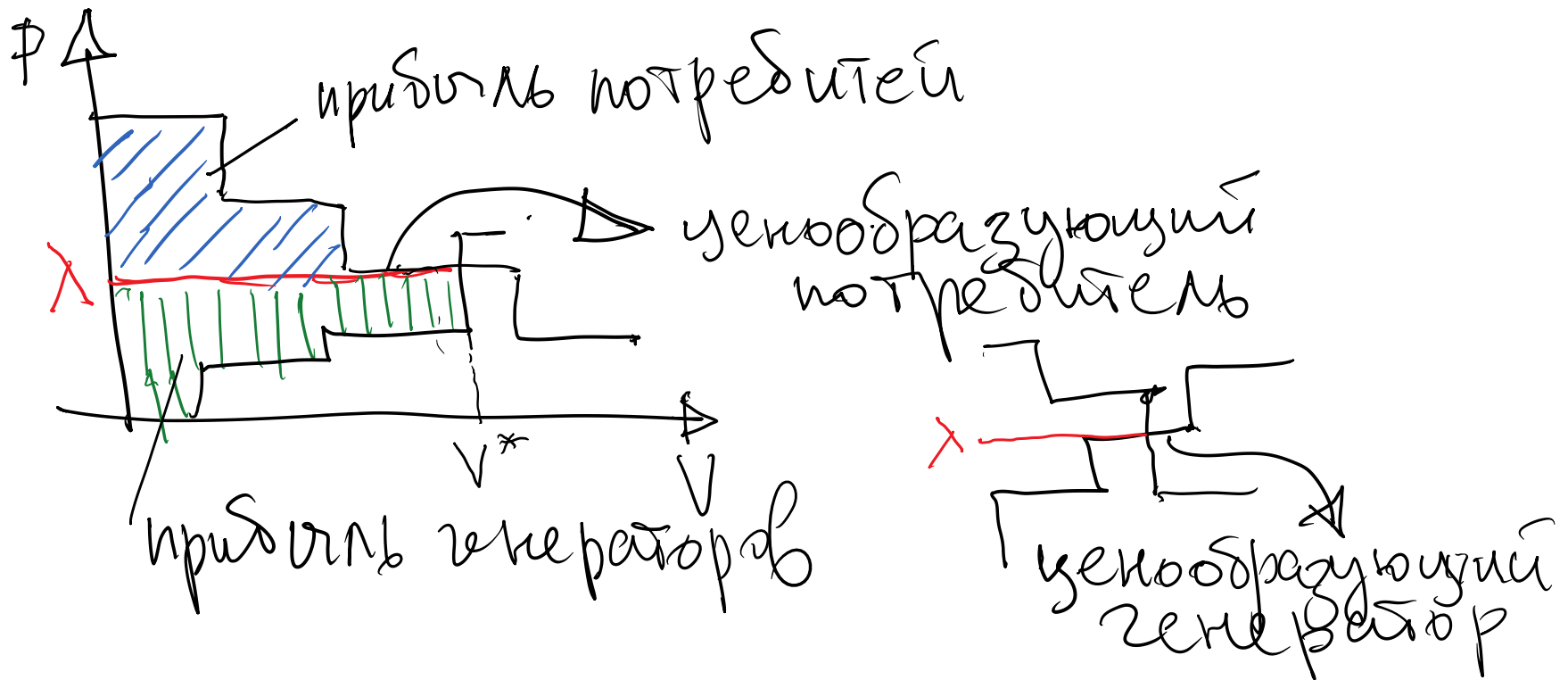
Равновесие

$$L(x, \lambda) = \sum_n (c_n - \lambda) x_n + \sum_r (\lambda - c_r) x_r \rightarrow \max$$

$$= \sum_n \max_{x_n} (c_n - \lambda) x_n + \sum_r \max_{x_r} (\lambda - c_r) x_r$$

$$c_n - \lambda - \pi_n^+ + \pi_n^- = 0, \quad n \in \Pi$$

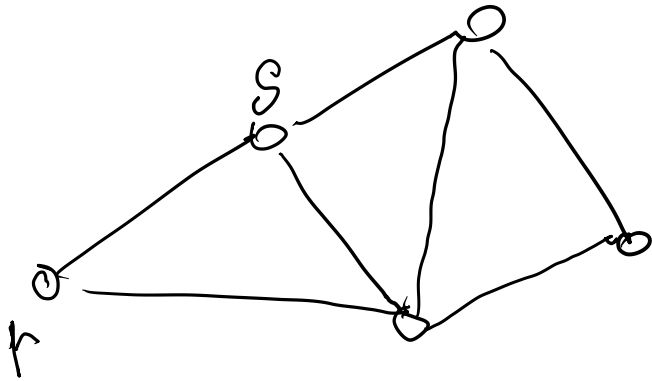
$$\lambda - c_r - \pi_r^+ + \pi_r^- = 0, \quad r \in \Gamma$$



Финансовый баланс

$$\lambda \left(\sum_n x_n \right) - \lambda \left(\sum_g x_g \right) = 0$$

Территориально распределенный аукцион



$$p \in r : \Pi_r$$

$$\Gamma \in r : \Gamma_r$$

$$c_n, x_n, x_n \in [0, \bar{x}_n]$$

$$c_r, x_r, x_r \in [0, \bar{x}_r]$$

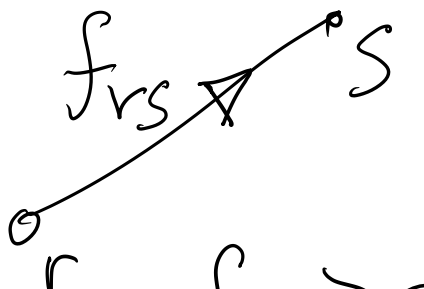
Найти равновесие с учетом перетоков
товара между узлами и ограничений
на пропускную способность сети

Матмодель

Целевая функция: функция балансовый
рынка

Ограничения

на пропускную способность сети;

 f_{rs} - переменная потока по
ветви (r, s)

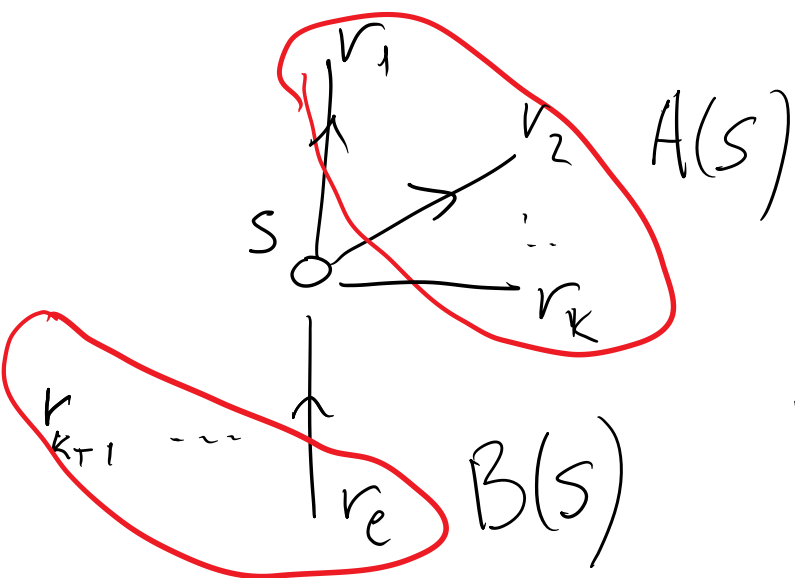
$f_{rs} > 0$, если поток из r в s

$f_{rs} < 0$, наоборот;

$$\left\{ \begin{array}{l} -f_{rs} \leq f_{rs} \leq f_{rs} \\ \quad \quad \quad [c^-] \quad [c^+] \end{array} \right.$$

Ограничение баланса спроса и предложения в узлах сети (s):

$$\sum_{\pi \in \Pi_s} x_\pi - \sum_{\tau \in \Gamma_s} x_\tau = \sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk}$$



$$\forall s \in S$$

$$Bx - Af = 0$$

$$B: |S| \times |\Pi| + |\Gamma|$$

$$A: |S| \times |E| \quad (v, s) \in E$$

Сб. 601 $\forall (r, s) \in E$ j -номеровый
номер столбца в A , соответ. (r, s)

Тогда $a_{rj} = -1$

$$a_{sj} = 1$$

$$a_{kj} = 0, k \neq r, k \neq s$$

Следствие: $e^T A = 0$, где $e \in \mathbb{R}^{|S|}$, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Свойство 2. Материальный баланс рогатки:

$$\sum_{n \in \Pi} x_n = \sum_{r \in \Gamma} x_r$$

Далее, $Bx - Af = 0$ заменим
на $e \in \mathbb{R}^{|S|}$, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 0 &= e^T (Bx - Af) = e^T Bx \quad (\text{по св. by 1}) \\ &= \sum_{n \in \Pi} x_n - \sum_{r \in \Gamma} x_r \end{aligned}$$

Условия равновесия

$$c_p = \overset{0}{\lambda} + \overset{0}{\lambda} \pi_p^+ - \pi_p^- , \quad p \in \Pi_S$$
$$\lambda_s = c_r + \pi_r^+ - \pi_r^- , \quad r \in \Gamma_s$$

$\Downarrow$

λ_s - равновесная узловая цена в узле s ,
при которой оптимальное решение (x_p, x_r)
является ИР-стратегией для каждого
участника

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = -\lambda_s + \lambda_r + \theta_{rs}^+ - \theta_{rs}^-$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_s = \lambda_r, \underline{f}_{rs} < f_{rs} < \bar{f}_{rs} \\ \lambda_s = \lambda_r + \theta_{rs}^+ > \lambda_r, f_{rs} = \bar{f}_{rs}, \theta_{rs}^+ > 0 \\ \lambda_s = \lambda_r - \theta_{rs}^- < \lambda_r, f_{rs} = \underline{f}_{rs}, \theta_{rs}^- > 0 \end{cases}$$

Т.о. узловая цена не убывает в направлении потока, и строго возрастает, если ограничение насыщено

Финансовый баланс

Умножим уравнение баланса в узле S на λ_S :

$$\lambda_S \left(\sum_{n \in \Pi_S} x_n - \sum_{r \in \Gamma_S} x_r \right) = \lambda_S \left(\sum_{r \in B(S)} f_{rs} - \sum_{k \in A(S)} f_{sk} \right)$$

Просуммируем правую и левую части по S :

$$\sum_S \lambda_S \left(\sum_{n \in \Pi_S} x_n \right) - \sum_S \lambda_S \left(\sum_{r \in \Gamma_S} x_r \right) = \text{сумма денег, затраченных потребителями} - \text{сумма денег, получаемая генераторами}$$

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk} \right) = \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} (\lambda_j - \lambda_i) =$$

$$f_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = \begin{cases} 0, & \lambda_j = \lambda_i \\ \sigma_{ij}^+ \bar{f}_{ij}, & f_{ij} = \bar{f}_{ij} \\ \sigma_{ij}^- \underline{f}_{ij}, & f_{ij} = -\underline{f}_{ij} \end{cases}$$

$$= \sum_{(i,j) \in E} \sigma_{ij}^+ \bar{f}_{ij} + \sigma_{ij}^- \underline{f}_{ij} \geq 0$$

Экономический смысл множителей Лагранжа

λ_s (узловая цена)

Δ_s - доп. потребление в узле s

$\lambda_s = - \frac{\partial F(x(\Delta_s))}{\partial \Delta_s}$ - минимальная возможная стоимость покрытия дополнительного потребления Δ_s в узле s

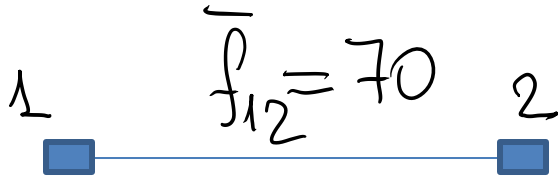
δ_{ij} (цена пропускной способности ветви (i, j))

Δ_{ij} - отриц. или позит. способность ветви (i, j)

$\delta_{ij} = \frac{\partial F(x(\Delta_{ij}))}{\partial \Delta_{ij}}$ - насколько
снизится стоимость
покрытия спроса
при прираще
или уменьш.
спос. ветви (i, j)
на Δ_{ij}

- цена пропускной способности как
ресурса

Пример 1



$$\Gamma 1: c_1 = 150$$
$$\bar{x}_1 = 80$$

$$\Gamma 2: c_2 = 200$$
$$\bar{x}_2 = 60$$

$$\Pi: c_{\Pi} = 500$$
$$\bar{x}_{\Pi} = 120$$

Оптимальное решение!

$$x_1 = 70, x_2 = 50, x_{\Pi} = 120$$

$$\pi_1^{+/-} = 0, \pi_2^{+/-} = 0, \pi_{\Pi}^{+} = c_{\Pi} - \lambda_2 = 500 - 200 = 300$$
$$\lambda_1 = 150, \lambda_2 = 200$$

$$\text{Т.к. } f_{12} = \bar{f}_{12} \Rightarrow \sigma_{12}^+ = \lambda_2 - \lambda_1 = 50$$

Интерпретация цен как производных оптимального значения ЦФ;

1. Прирост нагрузки Δ_1 в узле 1 $= +1$ МВт

$$\text{Оптимальное решение } x'_1 = x_1 + 1 = 71 \Rightarrow$$

$$= \Delta F = -150, \quad \lambda_1 = -\Delta F / \Delta_1$$

2. Прирост Δ пропускной способности ограничения $\bar{f}_{12}$: $+1$ МВт. Оптимальное решение

$$x'_1 = x_1 + 1, \quad x'_2 = x_2 - 1; \quad \Delta F = -150 + 200 = 50 = \sigma_{12}^+$$

Финансовый профицит

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \cdot x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_1 \cdot x_1 = \\ & = 200 \cdot 120 - 200 \cdot 50 - 150 \cdot 70 = \\ & = (200 - 150) \cdot 70 = 50 \cdot 70 = \sigma_{12}^+ \cdot \bar{f}_{12} \end{aligned}$$